# 68 函數方程式 $f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1} f(t)\,dt$ ニ就テ II

(阪大) 南雲道夫 角谷靜夫

21号ニ於テ

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

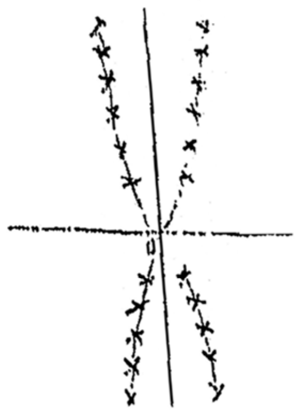
ガ $ax+b$ 以外ニ integral function ヲ解トシテ有スルカヲ問題トシテ残シテ置イタガ此ノ方程式ハ解トシテ $ax+b$ 以外ニ初等的ナ integral function ヲ有スル。シカモ linearly independent ナ integral function ヲ abzählbar unendlich ダケ有スルコトガワカッタ。

即チ $f(x)=e^{\alpha x}$, $\alpha$：複素数

トシテ上式ヲ満足スル様ニ $\alpha$ ヲ定メルコトガ出来ル。簡単ナ計算ノ結果 $\alpha$ ハ

$$\varphi(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2\alpha}-1=0$$

ヲ満足スルコトガ必要ニシテ十分デアル。$\varphi(\alpha)$ ナル $\alpha$ ニ関シテノ integral function ハ無数ノ零点ヲモツ。(コレヲ $\alpha_n$ トスル)



$$\alpha=a+bi \quad , a, b \ \text{real}$$

トシテソノ分布ヲシラベルト

$$b=\pm e^{|a|}(1+o(1))$$

$$a=\pm \cot b \cdot b \ (1+o(1))$$

デ大体等距離ノ割合デ分布シテヰル。

且, $e^{\alpha_n x}$ ハ互ニ linearly independent デアル。

之カラ若シ $\sum c_n e^{\alpha_n x}$ ガ一様収斂ナラバ之ガ又問題ノ方程式ヲ満足スルコトハ明カデアル。従ツテ逆ニ問題ノ方程式ヲ満足スル函数ガ $ax+b+\sum c_n e^{\alpha_n x}$ ナル形ニ表ハサレルカ？トユフ事ガ問題トナル。コレハ仲々容易デナイ。

尚上ト同様ナ問題及ビ方法ガ一般ニ Stieltjes 積分

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,d\varphi(t)=0$$

ナル函数方程式ニモ拡張サレル。コノ場合ニハ

$$\int_{-a}^{+a} e^{\lambda t}\,d\varphi(t)=G(\lambda)$$

トスレバ $G(\lambda)$ ハ $\lambda$ ノ integral function デアル。$\lambda_n$ ヲソノ零点トスレバ

$$f(x)=e^{\lambda_n x}$$

ハ問題ノ方程式ヲ満足スル。従ッテ又問題ノ方程式ヲ満足スル函数 $f(x)$ ガ $\sum c_n e^{\lambda_n x}$ ナル形ニ表ハサレルカトユフ問題ガ生ジル。

此ノ拡張サレタ問題ハソノ特殊ナ場合トシテ週期函数ヲ Fourier 級数ニ展開スル問題ヲ含ンデヰル。例トナレバ

$$\varphi(t)=\begin{cases}0 & t\leqq 0 \text{ ノトキ}\\ 1 & 0<t\leqq 1 \quad 〃\\ 0 & 1<t \quad 〃\end{cases}$$

トスレバ函数方程式ハ

$$f(x+1)-f(x)=0$$

又 $$G(\lambda)=e^{\lambda}-1$$

此ノ零点ハ $\lambda_n=2n\pi i$ 従ッテ 1 ヲ週期トスル函数ガ $\sum c_n e^{2n\pi i}$ ナル形ニ表ハサレルカトユフ事ガ問題トナル。之ガ即チ Fourier 級数論ニ外ナラナイ。

（12月4日）